令和２年　大学入試センター試験（数学 II・数学 B）の略解と解説

2020 年 5 月 6 日

第１問.　**［1］,（1）**　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき、

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots \quad ①$$

を満たす　θ　の範囲を求める問題。数字を当てはめる穴埋め問題。答えの所は赤文字にした。

加法定理より

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left\{\cos\theta\ \cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta$$

である。① より，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta - \sin\theta < 0, \quad \to \quad \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta < 0,$$

よって，①は　$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \ < \ 0$　と変形できる。したがって，答えは

$$\frac{2}{3}\pi \ < \ \theta \ < \ \frac{5}{3}\pi.$$

＊この問はレベル３。問題文の流れに従って，三角関数の加法定理と合成を用いて，計算をするだけの問題。穴埋め問題って考えることほとんどないね。

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$　で，k は実数，$\sin\theta$，$\cos\theta$　は 2 次方程式　$25x^2 - 35x + k = 0$　の解である。このとき，解と係数の関係より

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}, \quad \cdots \quad ② \qquad \sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25} \quad \cdots \quad ③$$

②より　$\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{49}{25} \ \to \ 2\sin\theta\cos\theta = \frac{24}{25}$　となるので，　$k = 12$.

2 次方程式は　$25x^2 - 35x + 12 = 0 \quad \to \quad (5x-4)(5x-3) = 0$　なので，$\sin\theta \geqq \cos\theta$　とすると，

$$\sin\theta = \frac{4}{5}, \quad \cos\theta = \frac{3}{5}.$$

このとき，　$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\cdots \ < \sin\theta = \frac{4}{5} = 0.8 \ < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\cdots$

なので　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$.

＊この問もレベル３。解と係数の関係式 ② と ③ が書ければ，計算の方針が見える。

［2］,（1）　t は正の実数で，$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$　である。両辺を二乗すると

$$\left(t^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = 9 \quad \to \quad t^{\frac{2}{3}} - 2 + t^{-\frac{2}{3}} = 9 \quad \to \quad t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = 11.$$

このとき，　$t^{\frac{2}{3}} + 2 + t^{-\frac{2}{3}} = 13 \quad \to \quad (t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = 13 \quad \to \quad t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{13}.$

また，　$\left(t^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = t - 3(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) - t^{-1} = -27 \ \rightarrow\ t - 3(-3) - t^{-1} = -27$

より，　$t - t^{-1} = -36$.

＊この問はレベル４に近いレベル３。$(a \pm b)^2$ と $(a \pm b)^3$ の展開式がわかっていれば簡単。

（2） $x,\ y$ は正の実数で，次の不等式を満たす。

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots ② \\ \log_{81} \dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

$X = \log_3 x,\ Y = \log_3 y$ とおくと，② は

$\log_3 x + \dfrac{1}{2}\log_3 y \leqq 5,$

$X + \frac{1}{2}Y \leqq 5,$ よって

$2X + Y \leqq 10. \quad \cdots ④$

また ③ は

$\log_{81} y - \log_{81} x^3 \leqq 1,$

$\dfrac{\log_3 y}{\log_3 81} - \dfrac{3\log_3 x}{\log_3 81}, \leqq 1$

$\dfrac{1}{4}Y - \dfrac{3}{4}X \leqq 1,$ よって

$3X - Y \geqq -4. \quad \cdots ⑤$

$X,\ Y$ が ④ と ⑤ を満たす領域は右図のベージュ色の部分，２直線の交点は $\mathrm{A}(\frac{6}{5},\ \frac{38}{5})$ だから，Y のとり得る最大の整数は 7 である。

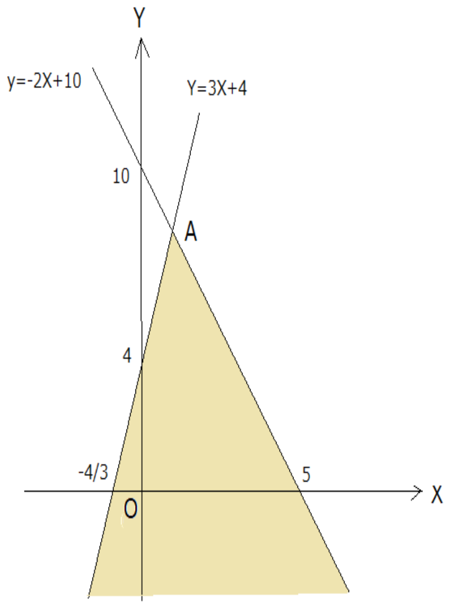

図 1: 第１問 [2]-(2)，対数不等式

$x,\ y$ が ②，③ と $\log_3 y = 7$ を同時に満たすとき，

$$② \rightarrow \log_3(x \cdot 3^{\frac{7}{2}}) \leqq 5 \rightarrow \log_3 x + \frac{7}{2} \leqq 5 \rightarrow \log_3 x \leqq \frac{3}{2} \quad \therefore\ x \leqq 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3} = 5.19\cdots. \quad ⑥$$

$$③ \rightarrow \log_{81} \frac{3^7}{x^3} \leqq 1 \rightarrow \frac{3^7}{x^3} \leqq 81 \rightarrow x^3 \geqq 3^3 \quad \therefore\ x \geqq 3. \quad \cdots ⑦$$

⑥, ⑦ より，x のとり得る最大の整数値は 5 である。

＊この問はやや難しいレベル３。計算が多いので間違いやすいかなあ，という感じの問題。

第２問． 関数 $f(x) = x^2 - (4a-2)x + 4a^2 + 1 \ (a > 0)$ が与えられている。放物線 C : $y = x^2 + 2x + 1$ と放物線 D : $y = f(x)$ の両方に接する直線を l とおく。

（1） l の方程式を求める問題。C より，$y' = 2x + 2$. l と C が点 $(t, t^2 + 2t + 1)$ において接しているとすると，l の方程式は

$$y = (2t+2)(x-t) + t^2 + 2t + 1 = (2t+2)x - 2t^2 - 2t + t^2 + 2t + 1 = (2t+2)x - t^2 + 1. \quad \cdots ①$$

また，l と D は点 $(s,\ f(s))$ において接している。$f'(x)=2x-(4a-2)$ より，l の方程式は

$y=(2s-4a+2)(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1=(2s-4a+2)x-2s^2+4as-2s+s^2-4as+2s+4a^2+1$

$=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1. \quad \cdots$ ②

① と ② は同じ直線なので，$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+\ \ 2 & \cdots ③ \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 & \cdots ④ \end{cases}$ を満たす。

③ より，$t=s-2a$. これを ④ に代入すると，

$$-(s-2a)^2+1=-s^2+4a^2+1 \quad \to \quad 4as=8a^2 \quad \therefore\ s=2a \quad \to \quad t=0.$$

したがって，l の方程式は　$y=2x+1$.

(2)　二つの放物線 $C,\ D$ の交点の x 座標は，

$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$

より　$4ax=4a^2$　$\therefore$　$x=a$.　C と直線 l，および直線　$x=a$　で囲まれた図形の面積 S は，

$S=\displaystyle\int_0^a \{x^2+2x+1-(2x+1)\}dx$

$=\displaystyle\int_0^a x^2\ dx=\frac{1}{3}[\ x^3\ ]_0^a=\frac{1}{3}a^3.$

さて，放物線 D は，

$y=\{x-(2a-1)\}^2+4a$　とかける。

右図の⑤ は　$a>1$　のときのグラフ，⑥ は $a \leqq 1$　のときのグラフである。

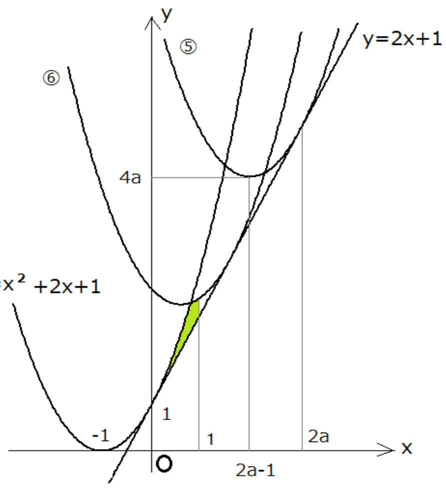

図 2: 第 2 問 (3)，放物線と直線

(3) $a \geqq \frac{1}{2}$　のとき，二つの放物線 $C,\ D$ と直線 l で囲まれた図形を考える。この図形の　$0 \leqq x \leqq 1$　を満たす部分の面積 T は，$a>1$　のとき，放物線 D は ⑤の位置にあるので，面積計算には関与しない。即ち，放物線 C だけで決まり，　$T=\displaystyle\int_0^1 \{x^2+2x+1-(2x+1)\}dx=\frac{1}{3}$.　つぎに，$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$　のとき，T の値は図 2 の黄緑色の部分の面積なので

$$T=\frac{a^3}{3}\ +\ \int_a^1 (x-2a)^2dx=\frac{a^3}{3}\ +\frac{1}{3}[(x-2a)^3]_a^1=\ \cdots\ =-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}.$$

(4) a が　$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$　の範囲を動くとき，$U(a)=2T-3S$　とおくと，

$$U(a)=-4a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}-a^3=-5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}.$$

a についてのこの 3 次関数は，

$$U\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24},\ U(1)=-\frac{1}{3},\quad U'(a)=-(15a^2-16a+4)=-(3a-2)(5a-2)$$

なので，$a=\dfrac{2}{5}$　で極小値，$a=\dfrac{2}{3}$　で最大値（極大値）　$\dfrac{2}{27}$　をとる。

＊ (1) はレベル３，(2) はレベル４，(3) は計算がしち面倒くさい，グラフの位置関係を正確に把握できないと手がつかないでしょう。レベル１に近いレベル２かな。(4) もレベル１に近いレベル２か。増減表をきちんと書かないと間違いやすい。

第３問. 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=0$ で次の漸化式を満たす。

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2),\}\qquad (n=1,2,3,\ \cdots).\qquad \cdots\ ①$$

(1) $a_2=\dfrac{4}{2}(3\cdot 0+3^2-2\cdot 3)=2(9-6)=6.$

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める。$\{b_n\}$ の初項は $b_1=0$ である。① の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1}=\frac{(n+3)}{(n+1)3^{n+1}(n+2)(n+3)}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\}$$

$$=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

よって，$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

したがって，$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$ である。

n を２以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{(1/3)^2(1-(1/3)^{n-1})}{1-1/3}=\frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n},$$

となることを利用すると

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3) 上の結果より，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=3^n(n+1)(n+2)b_n=3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}.\qquad \cdots\ ②$$

上の式から，すべての自然数 n について，a_n は整数であることがわかる。

(4) k を自然数とし，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を３で割った余りを考える。a_n の第１項は，②より３

の倍数，よって第 2 項を 3 で割ったときの余りを調べる。

$(a_{3k}$ の第 2 項$)=\dfrac{1}{2}(3k+1)(3k+2)=\dfrac{9}{2}k(k+1)+1$　だから，3 で割った余りは 1。

$(a_{3k+1}$ の第 2 項$)=\dfrac{1}{2}(3k+2)(3k+3)=\dfrac{3}{2}(k+1)(3k+2)$　だから，3 で割った余りは 0。

$(a_{3k+2}$ の第 2 項$)=\dfrac{1}{2}(3k+3)(3k+4)=\dfrac{3}{2}(k+1)(3k+4)$　だから，3 で割った余りは 0。

以上より，a_{3k}，a_{3k+1}，a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ 1, 0, 0 である。

また，$\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りを考えよう。この余りは，各項を 3 で割った余りの和をさらに 3 で割った余りと一致する。$a_{2020}=a_{3\cdot673+1}$ だから各数の余りの和は 673。これを 3 で割った余りは 1。したがって，答えは 1 。

＊この問題，(1) はレベル 4 。(2) は計算が多すぎて間違う確率が高いので，レベル 2（レベル 1 に近い）。(3), (4) は，まとめてレベル 1 か。(2) で計算間違いをすると全滅だよ。まああー，埋める穴が多すぎるよ。しかも，① のようなこんな数列，現実世界で出てくるか疑問だね。

第 4 問.　点 O を原点とする座標空間に 2 点

$$\mathrm{A}(3,\ 3,\ -6),\qquad \mathrm{B}(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$$

をとる。3 点 O, A, B の定める平面を α とし，α に含まれる点 C は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=24\quad\cdots\ ①$$

を満たす。

(1)

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{9+9+36}=\sqrt{54}=3\sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2+16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3},$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3(2+2\sqrt{3})+3(2-2\sqrt{3})+24=36$

. ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めておく。

$$\cos\theta=\frac{36}{3\sqrt{6}\cdot4\sqrt{3}}=\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \therefore\quad \theta=45^\circ.$$

(2) 点 C は平面 α 上にあり，実数 s, t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される。C の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおくと，① より

$$3x+3y-6z=0\quad\cdots\ ②,\qquad (2+2\sqrt{3})x+(2-2\sqrt{3})y-4z=24.\quad\cdots\ ③$$

また，x, y, z を s, t を用いて表すと，

$$x=3s+(2+2\sqrt{3})t,\ \cdots\ ④\quad y=3s+(2-2\sqrt{3})t,\ \cdots\ ⑤\quad z=-6s-4t.\ \cdots\ ⑥$$

これらを② に代入して整理すると，$3s+2t=0,\quad\cdots\ ⑦$

③からは，$3s+4t=2\quad\cdots\ ⑧$

を得る。⑦, ⑧ から，$s=-\dfrac{2}{3}$,　$t=1$.　C の座標は $(2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3},\ 0)$ なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{12+12}=2\sqrt{6}$$

である。

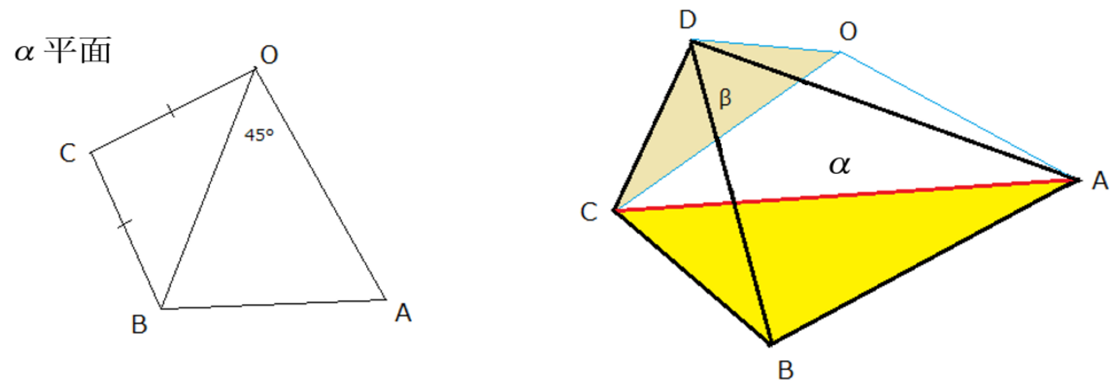

図 3: 第４問の図

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = (2,\ 2,\ -4)$ である。したがって，平面 α 上の四角形 OABC は平行四辺形ではないが，台形である。 ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}| = 2\sqrt{6}$ に注意せよ。 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，四角形 OABC の面積は $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6}\,(3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}\,) = 30$ である（図 3，左のもの参照せよ)。

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\sqrt{6}$ かつ z 座標が 1 であるような点 D を求めよう。
点 D の座標を $(x,\ y,\ 1)$ とおくと，

$$3x + 3y - 6 = 0, \quad \cdots \quad ①' \qquad 2\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}\,y = 2\sqrt{6}, \quad \cdots \quad ②'$$

より， $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ を得る。したがって，D の座標は

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 \right).$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 2$ だから，$\angle\mathrm{COD} = \theta$ とおくと，$\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{2 \cdot 2\sqrt{6}} = \dfrac{1}{2}$. すなわち $\angle\mathrm{COD} = 60°$.

3 点 O,C,D の定める平面を β とする。α と β は垂直であるので（このヒントはなくてもよいのだが，あれば非常にたすかる。なければ，けっこう難しい)，三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは $\sqrt{3}$ である。なぜならば，点 D から線分 OC に下した垂線の足を H とすれば，三角形 ODH は，3 辺の比が $1 : \sqrt{3} : 2$ の直角三角形なので，DH= $\sqrt{3}$ だからである。
三角形 ABC の面積（図の黄色の部分）は，台形 OABC の面積から三角形 OCA の面積を引けばよいので，$30 - 18 = 12$.

よって，四面体 DABC の体積は $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

∗この問の (1) はレベル 4（レベル 3 に近い)。線分 OA と OB のなす角を求めておいたほうが良い。(2) はレベル 2 かな（多量の計算をすばやくやる必要がある)。(3) はレベル 2（レベル 3 に近い)。(4) はレベル 1 でしょう。ここまで到達するのが大変。三角すいの高さでとまどうかな。平面 α の方程式は，$x + y + z = 0$ なのだが，これに気付くと楽なのだが，無理かな。

第５問.　**(1)** 確率変数 X の確率分布が，

$$P(0)=\frac{612}{720},\quad P(1)=\frac{54}{720},\quad P(2)=\frac{36}{720},\quad P(3)=\frac{18}{720}$$

と考えて解答すればよい。このとき，X と X^2 の期待値はそれぞれ

$$E(X)=\frac{1}{720}(54+2\cdot 36+3\cdot 18)=\frac{180}{720}=\frac{1}{4},$$

$$E(X^2)=\frac{1}{720}(54+2^2\cdot 36+3^2\cdot 18)=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}.$$

X の標準偏差は，$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ だから，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

＊この問はレベル３（レベル４に近い）。公式を使うだけの問題（こういう問題は出さなくてもいいだろ？）。

(2) 確率変数 Y は，二項分布 $B(600,\ 0.4)$ に従うので，平均と標準偏差はそれぞれ

$$E(Y)=600\times 0.4=240,\qquad \sigma(Y)=\sqrt{600\times 0.4\times 0.6}=\sqrt{144}=12.$$

$Z=\frac{Y-240}{12}$ は近似的に標準正規分布に従うので，Y が 215 以下になる確率は

$$P(Y\leqq 215)=P(Z\leqq -2.083)=\frac{1}{2}-P(0\leqq Z\leqq 2.083)=\frac{1}{2}-0.4814=0.0186\fallingdotseq 0.02.$$

また，$p=0.2$ のとき，Y の平均は，$600\times 0.2=120$ だから，上の平均の $\frac{1}{2}$ 倍，標準偏差は $\sqrt{600\times 0.2\times 0.8}=4\sqrt{6}$ だから，上の場合の $\frac{4\sqrt{6}}{12}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 倍である。

＊この問もレベル３，公式で計算するだけのつまらない問題。いや，点数が取れるからいいかな。

(3) 各標本 W_i $(i=1,2,\ \cdots\ n)$ は母集団分布に従う確率変数。各確率変数 $U_i=W_i-60$ $(i=1,2,\ \cdots\ n)$ の平均と標準偏差はそれぞれ

$$E(U_i)=E(W_i-60)=E(W_i)-60=m-60,\qquad \sigma(U_i)=\sigma(W_i-60)=\sigma(W_i)=30.$$

である。
ここで，$t=m-60$（各 U_i の平均）として，t に対する 95 %信頼区間を求める。無作為抽出された 100 人の生徒の標本平均が 50 分であったので，信頼区間は

$$50-1.96\times\frac{30}{\sqrt{100}}\leqq t\leqq 50+1.96\times\frac{30}{\sqrt{100}}\quad\to\quad 44.1\leqq t\leqq 55.9.$$

＊この問もレベル３。最後の問題にレベル３の問を３つものせる必要はさらさらない。まんべんなく問題を出せばいいという考えは止めた方がいいね。